

Skriftlig eksamen

FACITLISTE MM501 – Calculus I

onsdag den 28. oktober 2009 kl. 9.00 - 11.00

Om anvendelse af computer/lommeregner (og andre hjælpemidler) ved eksamen.

Det er tilladt at anvende en medbragt computer eller lommeregner, men ikke printer.

Man må bruge computeren til at reducere regneudtryk, udføre differentiationer, bestemme integraler og løse reelle ligningssystemer uden at dette medfører en lavere vurdering.

Besvares en del af en opgave derimod alene ved at anvende en mere avanceret facilitet (som f.eks. løsning af differentiallyigninger, bestemmelse af grænseværdier, beregning af Taylorpolynomier, regning med komplekse tal, løsning af ligninger i komplekse tal) vil den pågældende besvarelsesdel højst kunne vurderes som en "tilstrækkelig præstation" i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 02.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladt.

Om bedømmelsen af besvarelsenerne

Der lægges vægt på at besvarelsenerne er klart formulerede, og at argumentationen fremtræder tydeligt.

Opgavesættet består af 6 opgaver med ialt 8 delspørgsmål. Den samlede pointsum i hele sættet er 80. De point, der opnås ved denne eksamen, lægges sammen med pointene fra det obligatoriske projekt, og summen danner udgangspunkt for fastsættelsen af det endelige resultat (B eller IB).

OPGAVE 1 (20 point)

(a) Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x) \cdot y(x) = \cos(x) \cdot (1 + \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

SVAR

$$y(x) = \sin(x) + Ce^{-\sin(x)}, \quad \text{hvor } C \text{ er en vilkårlig reel konstant.}$$

(b) Bestem derefter den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

SVAR

$$y(x) = \sin(x) + \frac{4}{e} \cdot e^{-\sin(x)} \quad (\text{kan også skrives som } \sin(x) + 4e^{-1-\sin(x)}).$$

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

SVAR:

$$R(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{1 - \cos(3x)}.$$

SVAR

To gange anvendelse af l'Hopitals regel viser, at grænseværdien er $-\frac{4}{9}$.

Opgavesættet (og facitter) fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 4, 5, 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en "god præstation" i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 4 (20 point)

- (a) Bestem konstanten A så funktionen

$$h(x) = Ax^2 + \frac{2x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[0, 1]$.

SVAR

$$A = 2.$$

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $\text{Var}(X)$.

SVAR

$$E(X) = \frac{13}{18}, \quad \text{Var}(X) = \frac{73}{1620}.$$

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem lineariseringen af funktionen $\arcsin(x)$ omkring $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

NB: Den givne funktion betegnes ofte som $\sin^{-1}(x)$.

SVAR

$$L(x) = \frac{-\pi}{3} + 2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Opgavesættet (og facitter) fortsættes på næste side.

OPGAVE 6 (10 POINT)

Lad w betegne det komplekse tal $w = 1 + i$. Bestem følgende fire komplekse tal på formen $a + ib$ (naturligvis med a og b reelle tal), og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan.

$$w^2, \quad w^2 + 2\bar{w}, \quad \pm\sqrt{-i \cdot (w^2 + 2\bar{w})}.$$

SVAR

$$w^2 = 2i, \quad w^2 + 2\bar{w} = 2, \quad \pm\sqrt{-i \cdot (w^2 + 2\bar{w})} = \pm(1 - i).$$

